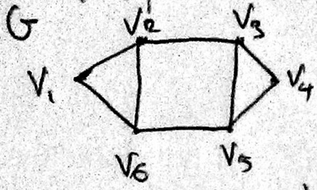
ΜΑΘΗΜΑ: 3

Γραφική (ή γραμμική) ακολουθία:

Μια φθίνουσα ακολουθία $\gamma = \langle d_1, d_2, \ldots, d_n \rangle$, όπου $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, καλείται γραφική αν υπάρχει γράφημα G με n κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_n$ και βαθμούς $d_1, d_2, \ldots, d_n$ αντίστοιχα.
Το γράφημα G θα λέμε ότι πραγματοποιεί την ακολουθία γ

Παράδειγμα:
(Το γράφημα από το προηγούμενο μάθημα)



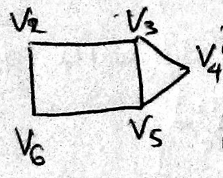
$\forall i = 1, \ldots, n$ 1) $0 \leq d_i \leq n-1$

2) το πλήθος των περιττών d_i είναι άρτιο

Κυκλικά έχουμε την ακολουθία $\gamma = \langle 2, 3, 3, 2, 3, 3 \rangle$
Όπου $d_1 = d_4 = 2$ και $d_2 = d_3 = d_5 = d_6 = 3$
Αν βάλω τους βαθμούς των παραπάνω κορυφών σε φθίνουσα σειρά θα έχω: $\gamma = \langle 3, 3, 3, 3, 2, 2 \rangle$ και το γράφημά μου δεν άλλαξε.
Επομένως η ακολουθία γ είναι γραφική

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν αφαιρέσω όποια κορυφή θέλω, διαγράφω μαζί και όλες τις προσκείμενες ακμές.

$G - v_1$:



$\gamma = \langle 2, 3, 2, 3, 2 \rangle$ (κυκλικά)

$\gamma = \langle 3, 3, 2, 2, 2 \rangle$ (φθίνουσα)

ΘΕΩΡΗΜΑ: Μια ακολουθία $\gamma = \langle d_1, \ldots, d_n \rangle$ είναι γραφική αν και μόνο αν η

$$\gamma' = \langle d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n \rangle$$ είναι γραφική

(έχω αφαιρέσει το d_1 και προέκυψε η γ')

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ [ΕΥΡΕΣΗ ΑΝ Η ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΕΙΝΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ]

Είσοδος: Μια ακολουθία n ακεραίων (οι βαθμοί των κορυφών του γραφήματος)
Έξοδος: ΝΑΙ, αν η γ είναι γραφική, όχι διαφορετικά

ΒΗΜΑ:1 Αν $\exists d \in \gamma : d \geq n$ τότε ΟΧΙ

ΒΗΜΑ:2 Αν $\exists d \in \gamma : d < 0$ τότε ΟΧΙ

ΒΗΜΑ:3 Αν $d_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, n$ τότε ΝΑΙ

ΒΗΜΑ:4 Εάν χρειάζεται, αναδιατάσσουμε τη γ ώστε να είναι φθίνουσα

ΒΗΜΑ:5 Διαγράφουμε τον 1ο όρο της ακολουθίας γ

ΒΗΜΑ:6 Αφαιρούμε 1 μονάδα από τους d_1-υπόλοιπους όρους

ΒΗΜΑ:7 Θέτουμε $n = n-1$

ΒΗΜΑ:8 Επαναλαμβάνουμε από το Βήμα 1

Αν π.χ $d_1 = 3$ τότε θα αφαιρέσουμε 1 μονάδα από τους επόμενους 3 όρους

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Είναι η ακολουθία $\gamma = <5,4,4,2,3,1,1>$ γραφική;

$\gamma = <5,4,4,2,3,1,1>$
$\gamma = <5,4,4,3,2,1,1>$ [Αναδιατάσσουμε]
$\gamma = <3,3,2,1,0,1>$ [Φεύγει το 1° σύμφωνα με το Βήμα 5 και 6]
$\gamma = <3,3,2,1,1,0>$ [Αναδιάταξη]
$\gamma = <2,1,0,1,0>$ [Φεύγει το 1°]
$\gamma = <2,1,1,0,0>$ [Αναδιάταξη]
$\gamma = <0,0,0,0>$ [Φεύγει το 1°]

Άρα ΝΑΙ, η ακολουθία είναι γραφική (Σύμφωνα με το Βήμα 3)

Άσκηση (Θέμα Εξετάσεων)

Να εξετάσετε αν είναι οι παρακάτω ακολουθίες γραφικές:

1. $\langle 1,1,1,1 \rangle$
2. $\langle 1,1,1 \rangle$
3. $\langle 5,5,5,4,4,3,3 \rangle$
4. $\langle 7,6,5,4,3,2,1 \rangle$
5. $\langle 6,5,4,3,2,2,0 \rangle$
6. $\langle 5,5,4,3,3,3,3,3,1,1,1 \rangle$

---

① $\gamma = \langle 1,1,1,1 \rangle$

$\gamma = \langle 0,1,1 \rangle$

$\gamma = \langle 1,1,0 \rangle$

$\gamma = \langle 0,0 \rangle$

Είναι γραφική

② $\gamma = \langle 1,1,1 \rangle$

$\gamma = \langle 0,1 \rangle$

$\gamma = \langle 1,0 \rangle$

$\gamma = \langle -1 \rangle$

Δεν είναι γραφική

③ $\langle 5,5,5,4,4,3,3 \rangle$

$\gamma = \langle 4,4,3,3,2,3 \rangle$

$\gamma = \langle 4,4,3,3,3,2 \rangle$

$\gamma = \langle 3,2,2,2,2 \rangle$

$\gamma = \langle 1,1,1,2 \rangle$

$\gamma = \langle 2,1,1,1 \rangle$

$\gamma = \langle 0,0,1 \rangle$

$\gamma = \langle 1,0,0 \rangle$

$\gamma = \langle -1,0 \rangle$

Δεν είναι γραφική

④ $\gamma = \langle 7,6,5,4,3,2,1 \rangle$

Παρατηρούμε ότι όλες οι κορυφές είναι 7 και ο μεγαλύτερος βαθμός είναι 7, άρα δεν είναι γραφική

⑤ $\gamma = \langle 6,5,4,3,2,2,0 \rangle$

$\gamma = \langle 4,3,2,1,1,-1 \rangle$

Δεν είναι γραφική

⑥ $\gamma = \langle 5,5,4,3,3,3,3,3,1,1,1 \rangle$

$\gamma = \langle 4,3,2,2,2,3,3,1,1,1 \rangle$

$\gamma = \langle 4,3,3,3,2,2,2,1,1,1 \rangle$

$\gamma = \langle 2,2,2,1,2,2,1,1,1 \rangle$

$\gamma = \langle 2,2,2,2,2,1,1,1,1 \rangle$

$\gamma = \langle 1,1,2,2,1,1,1,1 \rangle$

$\gamma = \langle 2,2,1,1,1,1,1,1 \rangle$

$\gamma = \langle 1,0,1,1,1,1,1 \rangle$

$\gamma = \langle 1,1,1,1,1,1,0 \rangle$

$\gamma = \langle 0,1,1,1,1,0 \rangle$

$\gamma = \langle 1,1,1,1,0,0 \rangle$

$\gamma = \langle 0,1,1,0,0 \rangle$

$\gamma = \langle 1,1,0,0,0 \rangle$

$\gamma = \langle 0,0,0,0 \rangle$

Είναι γραφική